

IV. Algebra

Algebrai átalakítások. Polinomok

IV

- 624.** a) Öttel osztható számok pl: -10 ; -5 ; 0 ; $5 \dots$ általánosan $5 \cdot l$ alakú, ahol l tetszőleges egész szám. Matematikai jelöléssel: $5 \cdot l$; ahol $l \in \mathbf{Z}$;
b) $3 \cdot k + 1$; vagy $3 \cdot k - 2$; ahol $k \in \mathbf{Z}$;
c) $4 \cdot m - 2$ vagy $4 \cdot m + 2$ alakú, ahol $m \in \mathbf{Z}$;
d) $7 \cdot n + 6$ vagy $7 \cdot n - 1$ alakú, ahol $n \in \mathbf{Z}$.
- 625.** a) Ezek a páratlan számok, így pl.: -21 ; 5 ; 17 ; 101 .
b) Az ilyen alakú számok hárommal osztva 2 -t adnak maradékul. Ilyenek pl.: 2 ; 5 ; -1 ; -10 .
c) Az ilyen alakban megadott számok 7 -tel osztva ötöt adnak maradékul. Pl.: 5 ; 12 ; 33 ; -2 .
d) Ez megegyezik a c) résszel.
- 626.** $11 \cdot l + 10$, vagy $11 \cdot l - 1$ alakú, ahol $l \in \mathbf{Z}$.
- 627.** A feltételek alapján az oldalak csökkenő sorrendben: $2 \cdot k + 1$, $2 \cdot k$, $2 \cdot k - 1$ alakúak. A háromszög kerülete a három oldal összege. $K = 2 \cdot k + 1 + 2 \cdot k + 2 \cdot k - 1 = 6k$. Pl: 3 , 4 , 5 vagy 9 , 10 , 11 .
- 628.** a) Legyen a két szám a , b ; $(a + b) + (a - b) = 2a$. Így igaz az állítás.
b) A feltételek szerint a három szám közül a középső $2k$ alakú, a két szomszédos szám $2k + 1$, illetve $2k - 1$ alakú. A három szám számtani közepe: $\frac{2k - 1 + 2k + 2k + 1}{3} = \frac{6k}{3} = 2k$. Az állítás igaz.
c) Legyen a két szám a , b ; $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$. Az állítás hamis.
- 629.** a) A , b) C , c) B , d) C , e) B , f) A , g) A , h) A .
- 630.** a) $-3x^6 + \frac{1}{2}x^5 + 2x^2 + 7x - 5$;
b) $\frac{7}{8}y^9 + 16y^8 + 4y^5 + \frac{3}{4}y^3 - 16y^2 - 0,3y + 1$;
c) $-z^{12} - 3z^{11} + 6z^{10} - 7z^7 + 8z^3 - 5z^2 + 2z + 4$.
- 631.** a) a szerint: $-2ab^3 + 9a^2b^2 - 8a^3b^4 - 7a^4b^5 + a^5b$;
 b szerint: $a^5b + 9a^2b^2 - 2ab^3 - 8a^3b^4 - 7a^4b^5$.
b) c szerint: $-88 + \frac{1}{11}d^5 + 3d^6 + \frac{2}{3}cd^2 - \frac{3}{2}c^2d - 11c^4 + 3c^9d^{10}$;
 d szerint: $-88 - 11c^4 - \frac{3}{2}c^2d + \frac{2}{3}cd^2 + \frac{1}{11}d^5 + 3d^6 + 3c^9d^{10}$.
- 632.** $-\frac{3}{2}x^{66} - x^7 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{5}{4}x^3 + 100x$.

IV

- 633.** a) $2xy$; $17xy$; $-2xy$;
 $-xy^2$; $\frac{9}{7}xy^2$;
 $\frac{1}{8}x^2y$; $9x^2y$; $4x^2y$.
 b) $5a^2bc$; $7a^2bc$; $-6a^2bc$;
 ab^2c ; $2ab^2c$; $-6ab^2c$; $5ab^2c$;
 $9abc^2$; $-abc^2$;
 $-3abc$; $3abc$.
- 634.** a^2 ; $\frac{7}{5}x$; b^5a ; axy ; $\frac{x}{2}$; $-2y^{13}$; $2a(1-x)$.
- 635.** a) $2ab = -2$; $-3a^3 = -\frac{3}{8}$; $0,6x^2 = 0,15$; $-\frac{2}{5}y = -\frac{1}{10}$; $-3b = 6$;
 b) $3x^2y = \frac{1}{3}$; $2xy^2 = \frac{1}{12}$; $-x^3y = -\frac{2}{27}$; $-x^2y^2 = -\frac{1}{36}$; $5xy = \frac{5}{6}$;
 c) $abc = -2$; $2a^2bc^2 = -4$; $-3ab^3 = 12$; $4abc^2 = -16$; $4a^2bc = -4$.
- 636.** a) $2a - 2b$; b) $2x - 2y$; c) $3y - 5$; d) $-3m - 9 + 3n$; e) $5a^2 - 12a$.
- 637.** a) $6c + 23d$; b) $10x^3 - x^2$; c) $-19b^2$; d) $x^2y + 14xy^2$.
- 638.** a) $28x - 21y + 25z$; b) $5m^2 - 3mn - 3n^2$; c) $14ab - 53bc - 13cd$;
 d) $20abc - 17bcd - 24cde$.
- 639.** a) $1\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{6}y - \frac{9}{20}z$; b) $ab - \frac{1}{14}bc - \frac{7}{15}ac$;
 c) $1,1ab - 3bc + 2cd$; d) $2abc - 0,3bcd + 0,5acd$.
- 640.** a) $\frac{5}{6}x^2y^2 - \frac{3}{4}ab - 1\frac{5}{6}a^2b^2 - \frac{3}{4}$;
 b) $-2\frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}x^2y - 2\frac{1}{4}xy^2 - 2\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{3}$.
- 641.** a) $8a^2 - ab - b^2$; b) $-11x^3 + 13x^2 - 4x - 1$.
- 642.** a) $9a^2 - 5b^2$; b) $10a - 8c + 9b$; c) $18m - 9n$; d) $20a^2 - 3a$.
- 643.** a) $6a$; b) $4a$; c) $-2a^2$; d) $14k^3l^2$; e) $-\frac{43}{30}b^2c$; f) $-6x^2y^3$;
 g) $3a^n - 2a^2$.
- 644.** a) $14b + 2$; b) $2c + 2d$; c) $-19i + 29j - 4k$; d) $-2x^2 - 6xy - 2y^2$;
 e) $a^3 + 7a^2 - 9a - 2$.
- 645.** a) $6x^5$; b) $8a^4$; c) $15m^3$; d) $12p^6$; e) $-18c^3$; f) $16d^4$; g) $3t^3$;
 h) $-20b^4$; i) $3a^4$; j) $2a^{2n+3}$; k) $-3x^{3n}$.
- 646.** a) $-6a^3b^2$; b) $16x^3y^3$; c) $-\frac{1}{2}c^5d^3$; d) $-\frac{5}{9}m^5n^3$; e) $-0,3x^5y^6$;
 f) $-1,2k^5b^4$; g) $0,32a^{2n+1}b^{3m}$; h) $-\frac{1}{2}x^k y^{k+3}$.

647. a) a^8 ; b) $10b^{17}$; c) $8c^{13}$; d) $-32e^5d^7$; e) $\frac{2}{3}g^{11}h^7$; f) i^3 ;

g) $\frac{1}{2l^2}$; h) $\frac{2}{3}j^3$; i) $4\frac{l}{k^4}$.

648. a) $G^2 = \frac{49m^4}{81n^6r^6}$; b) $H^3 = \frac{3^{12}n^3}{7^6m^9r^3}$; c) $G \cdot H = \frac{9}{7n^2mr^4}$;

d) $\frac{G}{H} = \frac{7^3m^5}{3^6n^4r^2}$; e) $\frac{G^4}{H^5} = \frac{7^{14}m^{23}}{3^{28}n^{17}r^7}$.

649. a) $2a^2 - 8ab$; b) $-15c^2 + 20c$; c) $12x^3 - 24x^2 + 20x$;

d) $12i^4 - 8i^3 - 6i^2$; e) $-6p^3q + 4p^2q^2 - 8pq^3$;

f) $-\frac{4}{3}r^5s^3 - \frac{14}{15}r^4s^2 + \frac{7}{2}r^3s^2 + \frac{7}{4}r^2s^3$.

650. a) $a^{2k} - 3a^{k+3}$; b) $-10b^{2n} + 6b^{2n-1} + 14b^{n+2}$;

c) $-12i^{2k-4} - 6i^{2k} + 15i^{2k-1}$; d) $21x^{3n} - 15x^{3n-1} + 9x^{3n-2}$.

651. a) $a^2 - 7a + 12$; b) $-2b^2 - b - 15$; c) $10c^2 + 7cd - 12d^2$;

d) $-6p^3 + 12p^2q + 4pq - 8q^2$; e) $3u^3v^3 - 9u^2v^2 - u^2v^3 + 3uv^2$;

f) $6x^4 - 19x^3y + 19x^2y^2 - 6xy^3 - 6x^2 + 4xy$.

652. a) $2a^2 - 30$; b) $4b + 14$; c) $c^4 + 2c^3 + c^2 - 1$; d) $d^4 - 1$; e) $9e^2 - 36$.

IV

Nevezetes azonosságok

A következő feladatoknál a nevezetes azonosságok felismerése a cél.

653. A következő párosításokat lehet megtenni:

$a - C$; $b - B$; $c - D$; $e - C$.

Nincs párja: d , A , E kifejezéseknek.

654. A lehetséges párosítások:

$A - d$; $B - c$; $C - d$; $D - c$; $F - a$; $G - e$;

Nincs párja az E , b , e kifejezéseknek.

655. Zárójelfelbontás után látható, hogy $(b - 1)^2 - 4 = b^2 - 2b - 3$.

Ha a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot alkalmazzuk,

akkor $(b - 1)^2 - 4 = (b - 1)^2 - 2^2 = (b - 1 - 2)(b - 1 + 2) = (b - 3)(b + 1)$.

Így tehát az a), illetve c) kifejezéssel egyenlő.

656. a) $(c - 1)^2$; b) $(b + 3)^2$; c) $(l - 10)^2$; d) $(7z - 8r)^2$; e) $(12j + 5i)^2$;

f) $\left(\frac{4}{3}l - \frac{3}{4}k\right)^2$; g) $(a^2 - 2)^2$; h) $(d^3 + 5)^2$; i) $(2p^2 - 3q^3)^2$.

657.

A-hoz választható: c), d);

B-hez választható b), e);

C-hez választható: c), d);

D-hez választható: g).

IV

A teljes négyzetté átírt alak:

A. $x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$; B. $4x^2 \pm 12x + 9 = (2x \pm 3)^2$;

C. $\frac{1}{4}x^2 \pm 4x + 16 = \left(\frac{1}{2}x \pm 4\right)^2$; D. $4x^2 - 8x + 4 = (2x - 2)^2$.

658. a) $a^2 + 2a + 1$; b) $b^2 - 6b + 9$; c) $4c^2 - 20c + 25$; d) $16d^2 - 24d + 9$;

e) $\frac{1}{4}e^2 + 3e + 9$; f) $f^2 + 6f + 9$; g) $9a^4b^2 - 6a^2b + 1$;

h) $16a^2b^4 - 24a^2b^3 + 9a^2b^2$; i) $\frac{9}{4}x^4y^2 + 2x^3y^4 + \frac{9}{4}x^2y^6$;

j) $\frac{25}{49}x^8y^4 - \frac{40}{21}x^6y^5 + \frac{16}{9}x^4y^6$.

659. a) $(a - 4)^2$; b) $(b - 4)^2 - 1$; c) $(c + 2)^2 - 1$; d) $(d - 1,5)^2 + 0,25$;

e) $(e - 5)^2 - 19$; f) $(f - 3,5)^2 - 7,25$.

660. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb$; b) $x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$;

c) $mx^2 + b^2 + 9 + 2mxb + 8mx + 6b$; d) $ax^2 + b^2 + \frac{1}{4} - 2axb + ax - b$;

e) $4a^2 + 9b^2 + 16 - 12ab - 16a + 24b$;

f) $9a^2 + 25b^2 + c^2 - 30ab + 6ac - 10bc$.

661. a) $(x + y + z)^2$; b) $(-a + b + c)^2$; c) $(-c - d + e)^2$; d) $(2x + 3y - z)^2$;

e) $(x + y \pm 2)^2$; f) $(m^2 + m + 1)^2$.

662. a) $(c^2 + c + 1)^2$; b) $(2x^2 + 3x + 2)^2$; c) $(a - 2a + 3)^2$.

663. a) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; b) $k^3 - 3k^2l + 3kl^2 + l^3$;

c) $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$; d) $c^3 + 3c^2 + 3c + 1$; e) $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$;

f) $d^3 - 12d^2 + 48d - 64$; g) $\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{4}p^2q + \frac{1}{6}pq^2 - \frac{1}{27}q^3$;

h) $\frac{125}{27}x^3 + 50x^2y + 20xy^2 + 8y^3$; i) $8x^6y^3 - 36x^5y^5 + 54x^4y^7 - 27x^3y^9$;

j) $-\frac{27}{8}a^{12}y^3 - \frac{9}{4}a^9y^5 - \frac{1}{2}a^6y^5 - \frac{1}{27}a^3y^9$.

664. a) $a^2 - 1$; b) $b^2 - 9$; c) $4c^2 - 25$; d) $9d^2 - 25c^2$; e) $9f^4 - 4$;

f) $16i^2j^2 - 9k^2$; g) $25r^4 - 9r^2$; h) $a^{2n} - b^8$; i) $9x^4y^2 - 4$.

665. a) $2(a + b)$; b) $3(2c - d)$; c) $d(a + b)$; d) $y(15x - 5z)$;

e) $3c(4d + 7a)$; f) $y(xy - z)$.

666. a) $3(2 - n)$; b) $a^3(a^2 - 1)$; c) $y^3(y + x)$; d) $9x(x^2 - 2)$;

e) $12y(2y^2 - 3)$; f) $ab^2(1 + ab)$; g) $a^2y^2(a^2y - 1)$.

667. a) $x^n(1 - x)$; b) $y^{2k}(1 + y^{3k})$; c) $7z^{n-2}(2z^2 - 3)$; d) $a^2x^{k-1}(ax^4 + 3)$.

- 668.** a) $y(a + b + c)$; b) $a(a^3 - 4a - 2)$; c) $3mn(n + 5 - 2m)$;
d) $5abc(7a - b + 4c)$.
- 669.** a) $(a + 2)(x + y)$; b) $(j - 3)(6 + j)$; c) $(x - y)(2x - 3y)$;
d) $(a - b)(5m - 3n)$; e) $(x - y)(2a + 3b)$; f) $(m - 2)(5 - m)$;
g) $(x + 5)(3x - 4)$; h) $(u - 1)(7u + 1)$.
- 670.** a) $(2 + a)(x + y)$; b) $(a + b)(n - m)$; c) $(i + j)(i - k)$;
d) $(u - v)(5a + 1)$; e) $(a - 2)(2a - 1)$; f) $(7n + 5m)(a - b)$;
g) $(2i + 3k)(11i - 5j)$; h) $x(x + 1)(x - 1)^2$.
- 671.** a) $(a - 2)(a - 3)$; b) $(b - 3)(b - 5)$; c) $(c - 4)(c + 3)$;
d) $(d + 10)(d - 3)$; e) $2(g^2 + g - 2) = 2(g + 2)(g - 1)$;
f) $-(k^2 - 6k + 8) = -(k - 4)(k - 2) = -(4 - k)(k - 2)$;
g) $-(l^2 - 3l - 10) = -(l - 5)(l + 2) = (5 - l)(l + 2)$.
- 672.** a) $(x + y)(x - y)$; b) $(m - n)(m + n)$; c) $(q - 4)(q + 4)$;
d) $(2r + 3)(2r - 3)$; e) $(x + 1)(x - 1)$; f) $(a + 5)(a - 5)$;
g) $(3 - c)(3 + c)$; h) $(b + 2)(b - 2)$.
- 673.** a) $(8 + c^2)(8 - c^2)$; b) $(l^2 - 3k)(l^2 + 3k)$; c) $(5ur^2 + 4p^3)(5ur^2 - 4p^3)$;
d) $(7 - d^2)(7 + d^2)$; e) $\left(\frac{2}{3}p - 1\right)\left(\frac{2}{3}p + 1\right)$; f) $\left(\frac{5}{6}q^2 - 13\right)\left(\frac{5}{6}q + 13\right)$.
- 674.** a) $(1 - xy)(1 + xy)$; b) $(2p^2 + 3)(2p^2 - 3)$; c) $(p + ab)(p - ab)$;
d) $(a^3b - c^2d^2)(a^3b + c^2d^2)$; e) $(4i^2 - 3j)(4i^2 + 3j)$;
f) $(9uw + 1)(9uw - 1)$; g) $(10m^2 - 8n^3)(10m^2 + 8n^3)$;
h) $(1 - 0,1x)(1 + 0,1x)$.
- 675.** a) $\left(0,2x - \frac{6}{7}y\right)\left(0,2x + \frac{6}{7}y\right)$; b) $(0,1t + 0,5u^2)(0,1t - 0,5u^2)$;
c) $\left(\frac{12}{5}x^k - \frac{9}{8}y^{k-1}\right)\left(\frac{12}{5}x^k + \frac{9}{8}y^{k-1}\right)$; d) $\left(\frac{1}{3m} - \frac{5m}{11}\right)\left(\frac{1}{3m} + \frac{5m}{11}\right)$;
e) $\left(\frac{0,2}{t^2} - \frac{3t}{r}\right)\left(\frac{0,2}{t^2} + \frac{3t}{r}\right)$.
- 676.** a) $(a + b)^2$; b) $(x - y)^2$; c) $(n - 3)^2$; d) $(c + d)^2$;
e) $(a - 1)^2$; f) $(b + 2)^2$; g) $(2c + 1)^2$; h) $-(d + 1)^2$;
i) $-(d + 3)^2$; j) $-(3c - 2d^2)^2$.
- 677.** a) $(a^2 + b)^2$; b) $(c^2 - b)^2$; c) $(5m^2 - n)^2$; d) $(3k^2 + l)^2$; e) $-(i^2 + j)^2$.

IV

- 678.** a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
 c) $(m+n)(m^2+mn+n^2)$; d) $(c-d)(c^2+cd+d^2)$;
 e) $(a+2)(a^2+2a+4)$; f) $(l+3)(l^2-3l+9)$; g) $(r-7)(r^2+7r+49)$;
 h) $(q+1)(q^2-q+1)$; i) $(4-j)(16+4j+j^2)$.
- 679.** a) $(1+a)(1-a+a^2)$; b) $(1-2b)(1+2b+4b^2)$;
 c) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$; d) $(2-3i)(4+6i+9i^2)$;
 e) $(5x+4y^2)(25x^2-20xy^2+16y^4)$;
 f) $\left(\frac{1}{2}k - \frac{3}{5}l^2\right) \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{10}kl^2 + \frac{9}{25}l^4\right)$.
- 680.** a) $(a+b)^3$; b) $(m-n)^3$; c) $(p-2q)^3$; d) $(2c+1)^3$.
- 681.** a) $(5m+1)^3$; b) $(4-2a)^3$; c) $(a+6)^3$; d) $\left(\frac{3}{4}ab^2 - \frac{2}{3}c^2\right)^3$.
- 682.** a) $11(a-b)(a+b)$; b) $3(c-d)(c+d)$; c) $7(m+1)(m-1)$;
 d) $x(x-1)(x+1)$; e) $c^2(c+1)(c-1)$; f) $ab(a-b)(a+b)$.
- 683.** a) $6(m-n)(m+n)$; b) $5(i+2j)(i-2j)$; c) $8r^2(p+3q)(p-3q)$;
 d) $u^2v^2(4u^2-9v^2)$.
- 684.** a) $2(a-b)^2$; b) $5(c+d)^2$; c) $6(m+1)^2$; d) $3r(s-1)^2$;
 e) $2u(1-v)^2$; f) $2j^3k(3j+k)^2$.
- 685.** a) $(a+b)^2 - 1 = (a+b+1)(a+b-1)$
 b) $(c-d)^2 - 4 = (c-d-2)(c-d+2)$;
 c) $5^2 - (x-y)^2 = (5-x+y)(5+x-y)$;
 d) $1^2 - (i+j)^2 = (1-i-j)(1+i+j)$;
 e) $(2a-5b)^2 - 36 = (2a-5b-6)(2a-5b+6)$;
 f) $(4m-n)^2 - 49 = (4m-n-7)(4m-n+7)$.
- 686.** a) $(a-b)(a+b+1)$; b) $(c+d)(c-d+1)$; c) $(e-f)(e+f+1)$;
 d) $k^3+l^3-k^2l-kl^2 = (k+l)(k^2-kl+l^2) - kl(k+l) = (k+l)(k-l)^2$;
 e) $(i-j)(i+j)^2$; f) $(x+y)^2 - z(x+x) = (x+y)(x+y-z)$.
- 687.** a) $(a-3)(a-2)$; b) $(b+2)(b+4)$; c) $(c-3d)(c-4d)$;
 d) $(e-5f)(e-2f)$; e) $(i-4)(i+3)$; f) $(g+4)(g-3)$;
 g) $(k-5l)(k+3l)$; h) $(m+5n)(m-3n)$.
- 688.** a) $2(x+3)(x+2)$; b) $2(x+3)(x+4)$; c) $2(y-2)(y-1)$;
 d) $3(y+6)(y+3)$.

- 689.** a) $a^3(a+1) + a(a+1) = a(a+1)(a^2+1)$;
 b) $(b-2)(b^2+2b+4) + 6b(b-2) = (b-2)(b^2+8b+4)$;
 c) $m^3(m^2-1) + (m^2-1) = (m-1)(m+1)^2(m^2-m+1)$;
 d) $(n+m)(n^2-nm+m^2) - nm(n+m) = (n+m)(n-m)^2$;
 e) $d^3(d+1) + (d+1) = (d+1)^2(d^2+d+1)$;
 f) $e^4(e^2-1) + 4e^2(e+1) = (e+1)[e^4(e-1) + 4e^2] = e^2(e+1)(e^3-e^2+4)$.
- 690.** a) $a^8 + 2a^4 + 1 - a^4 = (a^4+1)^2 - a^4 = (a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$;
 b) $(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$;
 c) $a^3 - 4a + a + 2 = a(a+2)(a-2) + a + 2 = (a+2)(a-1)^2$;
 d) $a^3 + 2a^2 + a^2 - 4 = a^2(a+2) + (a-2)(a+2) = (a+2)(a^2+a-2) = (a+2)(a+2)(a-1)$.
- 691.** a) $x^3 - 1 + x^2 - 1 = (x-1)(x^2+2x+2)$;
 b) $x^3 + x^2 + 7x^2 + 7x + 12x + 12 = x^2(x+1) + 7x(x+1) + 12(x+1) = (x+1)(x+3)(x+4)$;
 c) $y^4(y^2-1) + 2y^2(y+1) = y^2(y+1)(y^3-y^2+2)$;
 d) $y^4 - 9 + 5y^3 + 15y = (y^2+3)(y^2+5y-3)$;
 e) $x^3 + 27 + 9x^2 + 27x - x - 3 = (x+3)(x^2-3x+9) + 9x(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2+6x+8) = (x+2)(x+3)(x+4)$;
 f) $(x^2-49) - 10y(x-7) = (x-7)(x-10y+7)$.
- 692.** Legyen n egész szám.
 $(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = 8n+8 = 8(n+1)$ Mivel $n+1$ egész szám, így az állítás bizonyított.
- 693.** Legyen k egész szám.
 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, ami minden k egész esetén páratlan.
- 694.** Felhasználva az előző feladat megoldását:
 $K = 1003^2 - 1002^2 + 1001^2 - 1000^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 = 2005 + 2001 + \dots + 5 + 1 = 503\,506$.
- 695.** a) Legyen $n = 121\,212$, ekkor a tört:

$$\frac{n \cdot (2n-1) + (2n-1)(n+2)}{4n \cdot (n+1) - 2n+2} = \frac{(2n-1)(2n+2)}{(4n-2)(n+1)} = 1$$
;
 a) Jelöljük $60\,000\,000$ -t n -nel. Ekkor:

$$\frac{n \cdot (n+4) - (n+2)(n-2)}{n \cdot (n+1) - (n+1)(n-1)} = \frac{4 \cdot (n+1)}{n+1} = 4$$
.

696. Ha a egész szám, akkor közös nevezőre hozva:

$$\frac{80a}{2(2a-5)} : \frac{(2a+5)^2 - (2a-5)^2}{(2a-5)(2a+5)} = 2a+5, \text{ mely minden } a\text{-ra páratlan egész szám.}$$

697. A kisebbik egész számot t -vel jelölve:

$$t^2 + (t+1)^2 + [t(t+1)]^2 = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = (t^2 + t + 1)^2, \text{ mely egy egész szám négyzete.}$$

IV

Algebrai törtek

698. Az $a), d), j)$ esetben minden valós szám esetén értelmezhető az adott kifejezés.

b) $a \neq 3$; c) $b \neq 2$; e) $d \neq -2$;

f) $e \neq 0$; g) $f \neq -\frac{3}{4}$; h) $|n| \neq 4$;

i) $h \neq 0$; $h \neq 3$.

699. Az $a), c), e)$ kifejezések esetében (-1) -szeresére változik a tört értéke, a többi esetben változatlan marad.

700. a) Nem változik.

b) Nem változik.

c) Kétszeresére változik.

d) Négyyszeresére változik.

e) Nem változik.

701. a) $-\frac{1}{a-1}, a \neq 1$; b) $-\frac{b}{1-b}, b \neq 1$;

c) $-\frac{b-a}{c-d}$, vagy $-\frac{a-b}{d-c}, d \neq c$; d) $-\frac{5-a}{a-2}$, vagy $-\frac{a-5}{2-a}, a \neq 2$;

e) $-\frac{n+m}{a+b}, a \neq -b$.

702. Az előző feladat következménye.

703. a) $5a, a \neq 0$; b) $\frac{a}{6b}, b \neq 0$; c) $\frac{d^2 x}{5}, d \neq 0, x \neq 0$;

d) $\frac{6q}{5p}, p; q \neq 0$; e) $\frac{13s^6 t^2}{6r}, r; s; q \neq 0$.

704. a) $-1, a \neq b$; b) $-1, b \neq 3$;

c) $-\frac{3a}{2b}, d \neq c$; d) $-\frac{n}{3m}, i \neq j$;

$$e) \frac{a-b}{a+b}, \quad c \neq 0; a \neq -c; \quad f) \frac{1}{c+d}, \quad c \neq 0; c \neq -d;$$

$$g) \frac{f}{1-f}, \quad e \neq 0; f \neq 1; \quad h) \frac{k^2}{i-k}, \quad i; k \neq 0; i \neq k;$$

$$i) \frac{r+b}{s+t}, \quad s \neq 0; s \neq -t; \quad j) \frac{n+1}{a+b}, \quad n \neq 0; a \neq -b.$$

$$705. a) \frac{a}{a-1}, \quad |a| \neq 1; \quad b) -\frac{b}{b+1}, \quad |b| \neq 1; \quad c) \frac{c-d}{c+d}, \quad |c| \neq |d|;$$

$$d) -e-2, \quad e \neq 2; \quad e) \frac{1}{m-n}, \quad m \neq n; \quad f) \frac{a+1}{a-1}, \quad |a| \neq 1;$$

$$g) \frac{b+3}{b-3}, \quad b \neq 3.$$

$$706. a) a+1, \quad a \neq 1;$$

$$b) \frac{2}{3}, \quad b \neq 5;$$

$$c) \frac{c-3}{3}, \quad c \neq 3;$$

$$d) \frac{d-9}{5}, \quad d \neq -9;$$

e) A számláló nem alakítható szorzattá, így nem egyszerűsíthető a tört.

$$f) \frac{7}{2-f}, \quad f \neq 0; 2;$$

$$g) -1, \quad g \neq 5;$$

$$h) -\frac{k}{l}, \quad l \neq 0; l \neq 3k;$$

$$i) n(1-m), \quad m \neq -1;$$

$$j) \frac{c}{c-d}, \quad c \neq d;$$

$$k) \frac{5(3e+2f)}{2(3e-2f)}, \quad e \neq \frac{2}{3}f.$$

$$707. a) (x^2-y^2), \quad x \neq \pm y;$$

$$b) \frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x^2+y^2)}, \quad x \neq \pm y;$$

$$c) \frac{1}{x-y}, \quad x \neq y;$$

$$d) \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}, \quad x^2+xy+y^2 \neq 0;$$

$$e) \frac{1}{x-2}, \quad x \neq 2;$$

$$f) \frac{1}{x+3}, \quad x \neq -3.$$

$$708. a) \frac{7ab}{a^2-b^2}, \quad a \neq \pm b;$$

$$b) \frac{c^2-d^2}{c}, \quad c \neq 0;$$

$$c) \frac{10}{e^2-2e+4}, \quad e^2-2e+4 \neq 0; \quad d) \frac{g+h}{3(g-h)(g^2+h^2)}, \quad g \neq h \text{ és } g \neq 0;$$

$$e) \frac{n-1}{n+1}, \quad n \neq -1;$$

$$f) \frac{2(n-m)}{3(n^2-nm+m^2)}, \quad n^2-nm+m^2 \neq 0.$$

$$709. a) \frac{4(a-b)}{3(a+b)}, a \neq -b; \quad b) \frac{3(c-3d)}{5(c+3d)}, c \neq -3d; \quad c) \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, a \text{ és } b \neq 0;$$

$$d) \frac{c+d}{3}; \quad e) \frac{a(m+1)}{m(m-1)}, m \neq 1; \quad f) \frac{i-2}{i}, i \neq 0;$$

$$g) \frac{(u-3)^2}{u+3}, u \neq -3; \quad h) \frac{2(t+1)}{t^2-t+1}, t^2-t+1 \neq 0.$$

$$710. a) \frac{5(x-y) + a(x-y)}{4(a+5)} = \frac{x-y}{4}, a \neq -5;$$

$$b) \frac{p(p-q) - x(p-q)}{(p-x)^2} = \frac{p-q}{p-x}, p \neq x;$$

$$c) \frac{(c+d)(c^2-cd+d^2)}{(c-d)(c+d) - (c+d)} = \frac{c^2-cd+d^2}{c-d-1}, c \neq -d \text{ és } c-d \neq 1.$$

$$711. a) \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-2ab+b^2+ab} = a+b, a^2-ab+b^2 \neq 0;$$

$$b) \frac{(x-2a)^2}{(x-2a)(x+2a)} = \frac{x-2a}{x+2a}, x \neq 2a;$$

$$c) \frac{x(y-2) - 3(y-2)}{x(y-2)} = \frac{x-3}{x}, x \neq 0, y \neq 2.$$

$$712. a) \frac{(a+2)(a+3)}{(a+2)^2} = \frac{a+3}{a+2}, a \neq -2; \quad b) \frac{(b+1)(b+5)}{(b+2)(b+1)} = \frac{b+5}{b+2}, b \neq -2, -1;$$

$$c) \frac{(c-4)(c-3)}{(c-3)^2} = \frac{c-4}{c-3}, c \neq 3; \quad d) \frac{(d+7)(d+1)}{(d+1)^2} = \frac{d+7}{d+1}, d \neq -1.$$

Algebrai törtek összeadása, kivonása

$$713. a) \frac{11m-17}{24}; \quad b) \frac{6a-11b}{36};$$

$$c) \frac{-17c^2-7d^2}{20}; \quad d) \frac{11u-23v}{12};$$

$$714. a) \frac{53n+59m}{30}; \quad b) \frac{22a+65b}{24}; \quad c) \frac{xy+3y^2}{6}.$$

715. a) $\frac{19a}{5}$; b) $\frac{-3c-9d}{4}$;
 c) $\frac{4n-2m}{3}$; d) $\frac{9r-5s}{8}$.
716. a) $\frac{2bc+3ad}{abx}$, $a; b; x \neq 0$; b) $\frac{30x-14}{6x^2}$, $x \neq 0$;
 c) $\frac{5p^2 3n^2}{mnp}$, $m; n; p \neq 0$; d) $\frac{2a-3d}{d^2}$, $d \neq 0$;
 e) $\frac{6a-7b}{a}$, $a; b \neq 0$; f) $\frac{3a-4b}{a^4 b^3}$, $a; b \neq 0$;
 g) $\frac{27gf^2-15e^2 f+32eg^2}{36e^2 f^2 g^2}$, $e; f; g \neq 0$;
 h) $\frac{10ab-3b^2-7a^2}{a^2 b^2}$, $a; b \neq 0$;
 i) $\frac{6a^2+2a-5}{a^2 b}$, $a; b \neq 0$; j) $\frac{-m^2-2m+4}{mn}$, $m; n \neq 0$.
717. a) $\frac{11a-3}{a(a-1)}$, $a \neq 0; 1$; b) $\frac{-2b-6}{b(b+2)}$, $b \neq 0; 2$;
 c) $\frac{17i}{2(i-1)}$, $i \neq 1$; d) $\frac{9d-4}{4(d+2)}$, $d \neq -2$;
 e) $\frac{7e-f}{(e-f)(e+f)}$, $|e| \neq |f|$; f) $\frac{-2k}{(j-k)(j+k)} = \frac{2k}{k^2-j^2}$, $|j| \neq |k|$;
 g) $\frac{2b}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2b}{4a^2-b^2}$, $|b| \neq |2a|$.
718. a) $\frac{2c+8d}{(c-d)(c+d)} = \frac{2c+8d}{c^2-d^2}$, $|c| \neq |d|$; b) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$, $|m| \neq |n|$;
 c) $\frac{a^2+9}{a^2-9}$, $|a| \neq 3$.
719. a) $\frac{13}{4(x-1)}$, $x \neq 1$; b) 0, $a \neq -b$;
 c) $\frac{2m^2+mn-3n^2}{5(m^2-n^2)}$, $|m| \neq |n|$.
720. a) $\frac{6x-4}{x^2-4}$, $|x| \neq 2$; b) $\frac{2}{a+2}$, $|a| \neq 2$;

IV

$$c) \frac{m+n}{2(n-m)}, \quad |m| \neq |n|;$$

$$d) \frac{c-d}{2(c+d)}, \quad |c| \neq |d|;$$

$$e) \frac{e^2-8e+3}{2e(e^2-9)}, \quad e \neq 0; \pm 3;$$

$$f) \frac{2(i^2+ij+j^2)}{3(j^2-i^2)}, \quad |j| \neq |i|;$$

$$g) \frac{x^2+2x+2}{2x(x^2-1)}, \quad x \neq 0; \pm 1;$$

$$h) 0, \quad u; v \neq 0, \quad u \neq v.$$

$$721. a) \frac{6b^2-6ab-2a^2}{2ab(2a-3b)(2a+3b)}, \quad a; b \neq 0, \quad |a| \neq \left| \frac{3}{2}b \right|;$$

$$b) \frac{-14b}{(b-2)^2(b+2)}, \quad |b| \neq 2;$$

$$c) \frac{p^2+4p+37}{2(p-3)(p+3)}, \quad |p| \neq 3;$$

$$d) \frac{m+13}{2(m+3)^2}, \quad m \neq -3;$$

$$e) \frac{g+1}{5(g-4)^2}, \quad g \neq 4.$$

$$722. a) \frac{a+5}{6(a+1)^2}, \quad a \neq -1;$$

$$b) \frac{15b+8}{4b^2-9}, \quad |b| \neq \frac{3}{2};$$

$$c) \frac{-6m+5}{(3m-2)(3m+2)} = \frac{6m-5}{4-9m^2}, \quad |m| \neq \frac{2}{3};$$

$$d) \frac{-2p^2+15p-45}{2(p+3)(p-3)^2}, \quad |p| \neq 3;$$

$$e) \frac{8x^2-18}{(3-2x)(3+2x)} = -2, \quad |x| \neq \frac{3}{2}.$$

$$723. a) \frac{12a}{1-a^3}, \quad a \neq 1;$$

$$b) \frac{-4a+2}{2a(2a-1)} = -\frac{1}{a}, \quad a \neq 0; \frac{1}{2};$$

$$c) \frac{10a^2+10}{(a+1)^2(a-1)^2} = \frac{10(a^2+1)}{(a^2-1)^2}, \quad |a| \neq 1; \quad d) \frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}, \quad a \neq b.$$

724. a) Használjuk fel az $a-b = -(b-a)$ összefüggést. Közös nevezőre hozás után kapjuk:

$$\frac{b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}, \quad \text{ahol } a; b; c \neq 0, \quad a \neq b; c, \quad b \neq c.$$

A számláló szorzattá alakítható a következőképpen: $(b-c)(a-b)(a-c)$.

A tört értéke egyszerűsítés után: $\frac{1}{abc}$.

b) 0;

c) Az a) részhez hasonlóan kapjuk, hogy a tört értéke -3 ;

d) Két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosság többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy a tört értéke: 1.

Algebrai törtek szorzása, osztása

- 725.** a) $\frac{acd^3}{2b}$, $a; b; c; d \neq 0$; b) $\frac{5c^2}{2d}$, $d \neq 0$;
 c) $\frac{3b}{50ac}$, $a; c \neq 0$; d) $\frac{9b}{5ay}$, $a; b; x; y; z \neq 0$;
 e) 64 , $a; b; c; d \neq 0$; f) $\frac{p^3m}{12a^3b^2x}$, $a; b; c; x; y \neq 0$.
- 726.** a) $(a-b)b$, $a; b \neq 0$; b) 1 , $e; g \neq 0$;
 c) $\frac{2(2p-3q)}{npq}$, $n; p; q \neq 0, p \neq -\frac{3q}{2}$; d) $x-y$, $x, y \neq 0, x \neq -y$;
 e) $\frac{3}{4}$, $|c|=|d|$.
- 727.** a) $\frac{5}{9}$, $|a| \neq |b|$; b) $4(a^2+ab+b^2)$, $|a|=|b|$;
 c) $\frac{3(x+y)(x^2-xy+y^2)}{5(x-y)^2}$, $|x| \neq |y|$; d) $\frac{1}{6}$, $|a| \neq |b|$;
 e) $\frac{a(a-3)}{(a-2)(a+4)}$, $a \neq 2; -3; -4$.
- 728.** a) $\frac{a-1}{2a-1}$, $a \neq \pm 1$; b) $\frac{10}{2m+1}$, $|m| \neq \frac{1}{2}$; $m \neq 0$;
 c) $\frac{1-3a}{2(3a+1)}$, $|a| \neq \frac{1}{3}$; d) $\frac{-2k}{j^2-k^2} = \frac{2k}{k^2-j^2}$, $|j| \neq |k|$;
 e) $\frac{q+p}{q-p}$, $p; q \neq 0, p \neq q$; f) x^2+1 , $x \neq \pm 1$;
 g) $\frac{1}{x}$, $|x| \neq 1, x \neq 0$.
- 729.** a) $\frac{a+b}{ab}$, $a; b \neq 0, b \neq a$; b) 4 , $a \neq \pm 1$;
 c) $\frac{-b}{2(2a-3b)} = \frac{b}{2(3b-2a)}$, $|a| \neq \left| \frac{3}{2}b \right|$.
- 730.** A feltétel miatt: $\frac{a-b}{a} = \frac{b-c}{c}$, ebből
 $1 - \frac{b}{a} = \frac{b}{c} - 1$, $2 = b \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$,
 ha $a \neq 0, c \neq 0, b \neq 0, b \neq c$.

731. A feltétel miatt, ha $b \neq 0$, $d \neq 0$ akkor $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, tehát

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2.$$

732. Legyen a és b $m \cdot n$ -jegyű pozitív egész, melyekben n jegyű szám ismétlődik m -szer. Ekkor:

$$\frac{aa \dots a}{bb \dots b} = \frac{a(10^{(m-1)n} + 10^{(m-2)n} + \dots + 10^{2n} + 10^n + 1)}{b(10^{(m-1)n} + 10^{(m-2)n} + \dots + 10^{2n} + 10^n + 1)} = \frac{a}{b}, \text{ tehát a tört értéke: } \frac{43}{85}.$$

733. Az $a + b + c = 0$ feltételből: $a = -b - c$,
 $b = -a - c$,
 $c = -a - b$.

Ezeket a feltételeket írjuk be az állítás bal oldali nevezőibe:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - (-b - c)^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - (-a - c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (-a - b)^2}.$$

Végezzük el a nevezőben a zárójelfelbontást, és az összevonást. A következőt kapjuk: $-\frac{1}{2bc} - \frac{1}{2ac} - \frac{1}{2ab} = 0$. Közös nevezőre hozás, majd a feltétel felhasználása után kapjuk, hogy a kifejezés 0.

734. A tört számlálója: $(ab + c^2)^2 - (ac + b^2)^2$, a nevezője pedig: $(ab + c^2) + (ac + b^2)$, így a tört értéke egyszerűsítés után: $(ab + c^2) - (ac + b^2) = a(b - c) - (b^2 - c^2) = (b - c)(a - b - c)$.

735. A háromszög oldalai: x ; y ; z . Reciprok értékek szorzata: $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Összegük fele: $y = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right)$. Különbségük fele: $z = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)$. A három

szám közül a legnagyobb y és teljesül $y < x + z$, ha $a \neq b$, tehát már csak azt kell igazolnunk, hogy: $y^2 = x^2 + z^2$, azaz: $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right) \right)^2 + 1$. Ha $4a^2b^2$ -

tel minden tagot szorzunk, akkor az így keletkezett állítás már nyilvánvaló.

736. Általánosan:

$$\begin{aligned} & (xa + yb - zc)^2 + (xb + yc - za)^2 + (xc + ya - zb)^2 = \\ & = (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)(xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Így a tört értéke $\frac{1521}{361}$ az a, b, c bármely értéke esetén.